Über die Anzahl der natürlichen Zahlen, welche jeden Primteiler in mindestens h-ter Potenz enthalten

Kanold, Hans-Joachim

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 30, 1979, S.27-30

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Über die Anzahl der natürlichen Zahlen, welche jeden Primteiler in mindestens h-ter Potenz enthalten

Von **Hans-Joachim Kanold**, Braunschweig

Eingegangen am 19.10.1978

Wir betrachten Mengen $\mathfrak{N}_h$ von natürlichen Zahlen, welche die 1 enthalten und genau solche Zahlen mit der kanonischen Zerlegung

$$n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}, \tag{1}$$

bei denen für ein gegebenes $h \in \mathbb{N}$ gilt

$$h \leqq \alpha_\varkappa \text{ für } \varkappa = 1, \dots, k. \tag{2}$$

Die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{N}_h$, welche $\leqq x$ sind, sei $A_h(x)$. In einer früheren Arbeit [1] wurde die Behauptung

$$A_h(x) = O\left(x^{\frac{1}{h}}\right) \tag{3}$$

ausgesprochen. Der damals gegebene Beweis ist nicht ganz schlüssig. Wir wollen deshalb hier einen anderen Beweis für (3) geben und zugleich die Aussage verschärfen. Das liefert der

Satz. Es ist $\lim\limits_{x\to\infty} A_h(x) \cdot x^{-\frac{1}{h}} = C_h = \prod\limits_p \left(1 + \frac{p - p^{\frac{1}{h}}}{p^2(p^{1/h}-1)}\right).$

Beweis. Trivialerweise ist für jede natürliche Zahl N die Gleichung $A_1(N) = N$, d.h.

$$C_1 = 1 \tag{4}$$

gültig. Jedes $n \in \mathfrak{N}_h (h \geqq 2)$ kann nach (1) und (2) geschrieben werden in der Gestalt

$$n = \prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa^{h\nu_\varkappa + \beta_\varkappa} \text{ mit } 1 \leqq \nu_\varkappa;\ 0 \leqq \beta_\varkappa \leqq h-1. \tag{5}$$

Wir schreiben zur Abkürzung

$$\prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa^{h(\nu_\varkappa - 1)} = a^h;\ a \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Damit wird

$$n = a^h \cdot \prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa^{h+\beta_\varkappa}. \tag{7}$$

Das Produkt derjenigen $p_\varkappa$, für welche $\beta_\varkappa = 0$ gilt, sei q_0; das Produkt derjenigen $p_\varkappa$, für welche $\beta_\varkappa = r$ $(r = 1, \ldots, h-1)$ gilt, sei q_r. Dann haben wir

$$(8) \qquad n = (aq_0)^h \cdot q_1^{h+1}\, q_2^{h+2} \ldots q_{h-1}^{2h-1}.$$

(Leere Produkte werden $= 1$ gesetzt).

Wir können mit $aq_0 = b$ jedes Element $n \in \mathfrak{N}_h$ schreiben in der Gestalt

$$(9) \qquad n = b^h \cdot \prod_{r=1}^{h-1} q_r^{h+r},$$

wobei b eine natürliche Zahl, $q_1, \ldots q_{h-1}$ quadratfreie, paarweise teilerfremde Zahlen bedeuten. Ist n gegeben, so sind $b, q_1, \ldots, q_{h-1}$ eindeutig bestimmt. Sind $q_1, \ldots, q_{h-1}$ quadratfrei, paarweise teilerfremd, gegeben, dann ist die Anzahl dieser $n \in \mathfrak{N}_h$, $n \leqq x$ gleich

$$(10) \qquad \left[\left(\frac{x}{q_1^{h+1} \cdots q_{h-1}^{2h-1}}\right)^{\frac{1}{h}}\right].$$

Für $h = 2$ nehmen (9) bzw. (10) die Gestalt

$$(11) \qquad n = b^2 q_1^3 \text{ bzw. } \left[\left(\frac{x}{q_1^3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

an. Daraus folgt

$$(12) \qquad A_2(x) = \sum_{\substack{1 \leqq q \\ q \text{ quadratfrei}}} \left[\frac{x^{1/2}}{q^{3/2}}\right] \leqq x^{\frac{1}{2}} \cdot \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^{3/2}}\right).$$

Aus (12) folgt auch

$$(13) \qquad \sum_{1 \leqq q < x^{1/3}} \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{q^{3/2}} - 1\right) \leqq A_2(x) \leqq x^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{1 \leqq q} \frac{1}{q^{3/2}}$$

$$= x^{\frac{1}{2}} \cdot \prod_p \left(1 + p^{-\frac{3}{2}}\right); \text{ q quadratfrei.}$$

Hieraus ergibt sich

$$(14) \qquad \sum_{1 \leqq q < x^{1/3}} \frac{1}{q^{3/2}} - \frac{1}{x^{1/6}} \leqq A_2(x) \cdot x^{-\frac{1}{2}} \leqq$$

$$\sum_{1 \leqq q} \frac{1}{q^{3/2}} = \prod_p \left(1 + p^{-\frac{3}{2}}\right) \text{ oder}$$

$$(14') \qquad \prod_{p \leqq p(x)} \left(1+p^{-\frac{3}{2}}\right) - x^{-\frac{1}{6}} \leqq A_2(x)\, x^{-\frac{1}{2}},$$

wobei p(x) eine Primzahl bedeutet, für die $\prod_{p \leqq p(x)} p^3 \leqq x$ gilt.

Wir sehen, daß aus (14) und (14′) auch

$$(15) \qquad \lim_{x \to \infty} A_2(x) \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \prod_p \left(1+p^{-\frac{3}{2}}\right) = C_2$$

folgt. Beachten wir noch (14), so erhalten wir die Abschätzungen

$$(16) \qquad 1{,}75 < \left(1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\left(1+\frac{\sqrt{3}}{9}\right)\left(1+\frac{\sqrt{5}}{25}\right) < C_2;$$

$$C_2 < 1+\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{9}+\int_4^\infty x^{-\frac{3}{2}}\,dx < 2{,}546.$$

Damit ist in den Fällen $h = 1, 2$ alles gezeigt.

Für $h \geqq 3$ folgt aus (9) und (10)

$$(17) \qquad A_h(x) = \sum_{1 \leqq q_1, \ldots, q_{h-1}} \left[x^{\frac{1}{h}} \cdot \prod_{r=1}^{h-1} q_r^{-1-\frac{r}{h}} \right] \leqq$$

$$x^{\frac{1}{h}} \cdot \prod_p \left(1 + \sum_{r=1}^{h-1} p^{-1-\frac{r}{h}} \right).$$

Dabei sind $q_1, \ldots, q_{h-1}$ paarweise teilerfremd und quadratfrei.

Wir erhalten aus (17)

$$(18) \qquad \sum_{1 \leqq q_1, \ldots, q_{h-1}} \left\{ x^{\frac{1}{h}} \cdot \prod_{r=1}^{h-1} q_r^{-1-\frac{r}{h}} - 1 \right\} \leqq A_h(x),$$

wobei $\prod_{r=1}^{h-1} q_r^{h+r} < x$ gelten soll. Für

$1 \leqq q_1, \ldots, q_{h-1} < x^{\frac{1}{(h-1)(2h-1)}}$ wird $\prod_{r=1}^{h-1} q_r^{h+r} < x$. Das ergibt

$$(19) \qquad \sum_{1 \leqq q_r < x^{\frac{1}{(h-1)(2h-1)}}} \prod q_r^{-1-\frac{r}{h}} - x^{\frac{1}{2h-1}-\frac{1}{h}} \leqq A_h(x) \cdot x^{-\frac{1}{h}};$$

beachten wir noch $\lim_{x \to \infty} x^{\frac{1}{2h-1}-\frac{1}{h}} = 0$,

dann haben wir

$$(20)\qquad \lim_{x\to\infty} A_h(x)\cdot x^{-\frac{1}{h}} = C_h = \prod_p \left(1+\sum_{r=1}^{h-1} p^{-1-\frac{r}{h}}\right) = \prod_p \left(1+\frac{p-p^{1/h}}{p^2(p^{1/h}-1)}\right).$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Wir wollen noch einige Bemerkungen dazu machen. Aus

$$(21)\qquad C_h = \prod_p \left(1+\frac{p-p^{1/h}}{p^2(p^{1/h}-1)}\right) = \prod_p \left(1-p^{-1}\right)\left(1+p^{-1}\cdot\left(1-p^{-\frac{1}{h}}\right)^{-1}\right)$$

ersehen wir, daß

$$(22)\qquad C_h < C_{h+1}$$

erfüllt ist. Nun wollen wir auch im Fall $h \geqq 3$ handliche Abschätzungen für C_h angeben. Aus (17) erhalten wir

$$(23)\qquad C_h \leqq \prod_{r=1}^{h-1}\left(1+\sum_{1<n}\frac{|\mu(n)|}{n^{1+\frac{r}{h}}}\right) <$$

$$\prod_{r=1}^{h-1}\left(1-\frac{1}{4^{1+\frac{r}{h}}}+\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1+\frac{r}{h}}}\right) =$$

$$\prod_{r=1}^{h-1}\left(1-\frac{1}{4^{1+\frac{r}{h}}}+\frac{h}{r}\right) < \binom{2h-1}{h} < 4^{h-1}\cdot\sqrt{\frac{2}{h+1}},$$

wie man mit Hilfe von vollständiger Induktion einsehen kann. Eine Abschätzung von C_h nach unten bekommt man aus

$$(24)\qquad \sum_{r=1}^{h-1} p^{-1-\frac{r}{h}} = \frac{1}{p}\sum_{r=1}^{h-1} p^{-\frac{r}{h}} = \frac{1}{p}\sum_{r=1}^{h-1} p^{\frac{r}{h}-1},$$

wenn man

$$(25)\qquad p^{-\frac{r}{h}}+p^{\frac{r}{h}-1} \geqq 2\,p^{-\frac{1}{2}};\; p^{1-\frac{r}{h}}+p^{\frac{r}{h}}-2\,p^{\frac{1}{2}} = \left(p^{\frac{1}{2}-\frac{r}{2h}}-p^{\frac{r}{2h}}\right)^2 \geqq 0$$

berücksichtigt.

Damit wird

$$(26)\qquad C_h \geqq \prod_p\left(1+\frac{h-1}{p^{\frac{3}{2}}}\right) > \prod_{p\leqq(h-1)^{2/3}} 2 = 2^{\pi\left((h-1)^{2/3}\right)}.$$

Hieraus folgt nun auch

$$(27)\qquad \lim_{h\to\infty} C_h = \infty.$$

Literatur

[1] *Kanold, H.-J.:* Über die Verteilung der vollkommenen Zahlen und allgemeinerer Zahlenmengen, Math. Ann. **132**, 444–450 (1957).